Philosophie et MATHEMATIQUE

(cours 1 et 2)

Pourquoi une philosophie des mathématiques ?

épistémologie, métaphysique et ontologie, logique, sciences cognitives, philosophie du langage et sémantique, sociologie ? lien avec les autres disciplines scientifiques…

• Beaucoup de philosophes se sont intéressés aux mathématiques : Platon, Descartes, Leibniz, Pascal,… Bolzano, Russel, Withehead, Hilbert, Frege, Gödel …

• *Questions philosophiques*

quel rôle spécifique jouent les mathématique parmi les autres disciplines (sciences) et pourquoi ?

• *Disciplines mathématiques :*

géométrie, topologie / algèbre / logique ; théorie des ensembles, des catégories / calcul, informatique / statistiques, probabilités (mathématiques du hasard)

Des liens mystérieux (mathématique et physique : « Researchers are on the trail of a mysterious connection between number theory, algebra and string theory »)

(https://www.quantamagazine.org/20150312-mathematicians-chase-moonshines-shadow/)

• Hypothèse de riemann / théorème de Fermat / conjecture de Poincaré…

Ontologie des mathématiques

Les objets mathématiques (nombres, ensembles…) existent-ils ?

(OUI selon Platon: réalisme ontologique ; objets abstraits : inertes, non localisés dans l'espace et le temps).

Quel est le statut des expressions mathématiques ? Peut on toujours dire qu'une expression est vraie ou fausse ? (OUI = réalisme de vérité)

• *Réalisme* ***(ce que je dessine existe déjà)***

• s'oppose au *Constructivisme* (vrai problème ou problème de langage ?)

• ou à l'*Intuitionnisme* (les objets mathématique sont des constructions mentales : exister = avoir été effectivement construit) :

→ pas de vérités [encore] inconnues

→ pas de loi du tiers exclu (non faux différent de vrai)

• Quelle logique pour les mathématiques ?

Une expression mathématique a-t-elles un contenu informatif ? Un sens ?

• Des positions :

Rationalisme : la raison est source de connaissance.

S'oppose à l'*Empirisme* (*positivisme*: cercle de Vienne…): l'expérience (sensorielle) est source de connaissance

LES NOMBREs

• Peut-on faire des mathématiques sans supposer que les nombres existent ?

• Compter/conter / raconter ; zahlen / erzahlen

• **Musique et mathématique** : **Leibniz** « La musique est le plaisir que connaît l'esprit humain lorsqu'il compte sans le savoir. »

Rameau (1722) : « sans tenir compte de toute l'expérience que j'ai pu acquérir dans la musique de par ma si longue association avec elle, je dois avouer que mes idées ne se sont clarifiées qu'avec l'aide des mathématiques. »

Euler aurait voulu faire de la théorie musicale « une partie des mathématiques et déduire de façon ordonnée, à partir de principes corrects, tout ce qui peut rendre plaisants l'association et le mélange de tons. »

• calculer (Arago : « **Euler** calculait sans effort apparent, comme d'autres respirent, ou comme les aigles planent sur le vent. »)

• **Aristote** : tout est nombre --- informatique : tout est nombre

• Dans notre société, nous sommes des nombres. (sécurité sociale, compte en banque…)

• En physique, tout résultat de mesure est un nombre (un rapport)

1) Les naturels : 1,2,….

Nous avons une idée intuitive par comptage: *cardinal* = nombre d'éléments d'un ensemble. Réunion d'ensembles → addition des nombres

Ceci peut être axiomatisé (définition abstraite des nombres naturels)

• La structure des Naturels : un ensemble avec plusieurs propriétés

Addition : composition, structure de groupe

Succession, ordre → plutôt la *catégorie* des naturels que l'ensemble des naturels!

[alors *foncteur* entre naturels et Ensembles]

• Les naturels sont des « objets » indépendants. Pourtant ils ont entre eux des relations (succession : un processus qui génère tous les nombres à partir de 1 !)

Ces relations ne sont-elles pas ce qu'il y a de plus important (*STRUCTURALISME*)

(en fait, on n'a jamais étudié spécialement le nombre 6497654654975, et pourtant on le connaît aussi bien que les autres)

• Notations : 5, cinq, five, V, •••••, 101 (base 2)

bases : binaire, octal, décimal, hexadécimal (16), sexagésimal

Système sexagésimal: système de numération utilisant la base 60. Il subsiste dans la mesure du temps, des angles et des arcs (y compris les coordonnées géographiques). Il semble avoir été utilisé pour la première fois par les Sumériens au IIIè millénaire av. J.-C. puis, au IIè millénaire av. J.-C., par les Babyloniens ; les Babyloniens ont un système de numération pour chaque type de grandeur.

La mesure du temps en Chine suit le cycle sexagésimal chinois entre 1191 et 1154 av. JC (Dynastie Shang).

Le calendrier hindou fait de même depuis 3102 av. J.-C.

Il a beaucoup été utilisé par les astronomes et géographes grecs, tels Ptolémée ou Théon d'Alexandrie, qui nous laissent une méthode pour calculer la racine carrée de nombres écrits dans le système sexagésimal. Par la suite il a été utilisé également dans le monde arabo-musulman pendant la dynastie des Omeyyades, en particulier dans les versions du zij du mathématicien ouzbek Al-Khwarizmi, aujourd'hui connues sous le nom de « Table indienne », et par des mathématiciens européens comme Fibonacci.

• **N**umération de position à base 20 : les mayas

Compter avec ses mains

12 : Certains peuples comme les vietnamiens, comptent leurs phalanges avec le pouce ; le pouce défile sur les trois phalanges des quatre autres doigts, soit douze phalanges.

60 : Si par ailleurs on utilise les doigts de l'autre main pour les retenues, on a cinq retenues, soit 5×12 = 60 nombres. Selon l'historien des calculs Georges Ifrah, on peut supposer que la numération en base 60 vient de là1.

156 : Si on utilise les phalanges de l'autre main pour les retenues, soit 12 phalanges, on a 12×12 = 144 nombres, ce qui permet donc de compter jusqu'à 144+12 = 156 sur ses doigts.

Srinivasa Ramanujan **:**

En 1913, le mathématicien anglas G. H. Hardy reçoit une lettre d'un jeune homme de Madras décrivant quelques formules mathématiques qu'il a découvertes. Beaucoup d'entre elles sont connues mais 3 étaient surprenantes : « elles doivent être vraies » selon Hardy. Il invite Srinivasa Ramanujan « si elles ne sont pas vraies, personne n'aurait eu assez d' imagination pour les inventer."(« Ramanujan credited many of his discoveries to the goddess Namagiri, who appeared to him in visions »).

Le zéro ;

nécessaire pour la notation : place vacante : distinguer: 105 de 15

[En 300 av. J.-C. les Babyloniens utilisaient deux barres obliques à cet effet.]

• introduit par les mathématiciens indiens (en 628, Brahmagupta définit le zéro, dans son traité " Brahma-sphutasiddhârta ", comme la soustraction d'un nombre par lui-même: a – a = 0 et il en décrit les propriétés: a + 0 = a / a – 0 = a / a . 0 = 0

Il va jusqu'à affirmer que la division par zéro est une définition de l'infini.

• Il existait aussi dans les civilisations précolombiennes. Au 3e siècle, les Mayas avaient développé un système de numération très poussé, basé sur l'art du calendrier et de l'astronomie. Ils avaient, eux aussi, inventé une numération de position à base 20 et comportant le zéro, représenté par un coquille.

• En 773 un indien apporte des écrits d'astronomie de Brahmagupta , chez le calife de Bagdad. C'est alKhwarizmi qui les exploite et publie un livre en 820, présentant les nouveaux chiffres indiens (sera traduit par Robert de Chester en Espagne au début XIIe siècle).

• Fibonacci   étudia en Afrique auprès d'un professeur musulman. Il conclut que le système indien était le meilleur. En 1202, il publie le *Liber Abaci*, recueil qui rassemble pratiquement toutes les connaissances mathématiques de l'époque.

• élément neutre pour l'addition

• cardinal de l'ensemble vide

• pas d'année zéro dans le calendrier

[doc : http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/ZerHisto.htm]

3) les nombres premiers

Les *nombres premiers* sont ceux qui sont divisibles seulement par 1 et par eux-mêmes. On sait, depuis la plus haute antiquité, qu'il y a une infinité de tels nombres.

• Briques pour la multiplication : tout nombre se décompose en facteurs premiers

• Applications en physique, en informatique (cryptographie)

• fascine tous les mathématiciens [conjecture de Goldbach…]

Euler (1751) : « Certains mystères échapperont toujours à l'esprit humain. Pour nous en convaincre, il suffit de jeter un œil aux tableaux des nombres premiers, et on verra qu'il n'y règne ni ordre, ni règles.

Gauss : « Vous n'avez aucune idée de la poésie que recèle une table de logarithmes. »

Âgé de près de 70 ans, dans une lettre à Encke, Gauss avouera avoir établi au cours de sa vie une liste des nombres premiers jusqu'à 3000000.

André Weil était un grand spécialiste, de l'**hypothèse de Riemann** : (en 1979)   « Or l'hypothèse de Riemann n'est pas un point isolé des mathématiques, mais au contraire, constitue un verrou de la théorie des nombres. Pour la démontrer, il faudrait d'abord mieux connaître, et par conséquent faire progresser la théorie des nombres. »

• Ouvertures vers les autres disciplines

Théorèmes et conjectures

l'histoire du grand théorème de Fermat (XVII^{e} siècle), démontré en 1994 par Andrew Wiles : Pierre de Fermat, en marge d'une traduction (grec → latin) des *Arithmétiques* de

Diophante : pour tout entier n strictement supérieur à 2, il n'y a pas de nombres entiers positifs non nuls tels que $x^n + y^n = z^n$

Puis Diophante (Alexandrie, IIIè siècle) (*n* = 2, infinité de solutions non nulles, les triplets pythagoriciens, dont le plus petit est (3, 4, 5) : $3^2 + 4^2 = 5^2$.)

Puis en 1670, cas *n* = 4 ; en 1753, n=3

En 1816, l'Académie des sciences de Paris offre une médaille d'or et un prix de 3 000 francs.

En 1825, Lejeune Dirichlet et Legendre prouvent le cas *n* = 5 ; en 1832, Dirichlet prouve le cas *n* = 14 ; en 1839, Lamé prouve le cas *n* = 7.

En 1850, le prix de l'Académie est renouvelé. En 1857, Ernst Kummer démontre pour tout exposant inférieur à 100.   En 1908, l'université de Göttingen et la fondation Wolfskehl offrent un prix de 100 000 marks à qui trouverait la démonstration avant cent ans. En 1952, Harry Vandiver utilisa un ordinateur SWAC (en) pour le démontrer pour tous les exposants inférieurs à 2000.

Le réel intérêt de ce théorème est un moteur puissant qui oblige à étudier les structures algébriques d'objets dont on aurait eu peine à imaginer l'existence au temps de Fermat : un début pour l'étude de questions bien plus profondes et qui sont au cœur de l'invention mathématique contemporaine.

Démonstration par Andrew Wiles :

au bout de huit ans de recherches intenses, dont sept dans le secret le plus total. La démonstration, publiée en 1995, recourt à des outils très puissants de la théorie des nombres : conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, formes modulaires, représentations galoisiennes, cohomologie galoisienne, représentations automorphes,   formule des traces…

En juin 1993, en conclusion d'une conférence de trois jours, il annonce que le grand théorème de Fermat est un corollaire de ses principaux résultats exposés. Dans les mois qui suivent, la dernière mouture de sa preuve est soumise à une équipe de six spécialistes (dans la plus grande confidentialité, l'atmosphère tendue) → faille !

Wiles vit une période très difficile, il est à bout de forces, il pense qu'il a échoué et se résigne. Ce n'est que neuf mois plus tard que se produira le dénouement.

19 septembre 1994 : « En un éclair, je vis que toutes les choses qui l'empêchaient de marcher c'était ce qui ferait marcher une autre méthode (théorie d'Iwasawa) que j'avais travaillée auparavant. » Le 25 octobre 1994, deux manuscrits sont diffusés dont le premier (très long) annonce entre autres la preuve.

Notions utilisées : Courbes elliptiques, Courbe de Frey-Hellegouarch, conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, Conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, fonctions L, formes modulaires, groupes de Galois absolus, théorie des déformations des représentations galoisiennes.

4) Opérations et constructions

Soustraction --> nombres négatifs : N --> Z

Multiplication --> fractions --> Q : rationnels

Les Rationels : fractions

Fractions babyloniennes. Les Babyloniens utilisaient des tables d'inverses en base 60. Par exemple :

$1/2 = 0 + 30/60$

$1/3 = 0 + 20/60$

$1/4 = 0 + 15/60$

$1/5 = 0 + 12/60$

$1/6 = 0 + 10/60$

$1/8 = 0 + 7/60 + 30/60^2$

$1/9 = 0 + 6/60 + 40/60^2$

$1/10 = 0 + 6/60$

$1/12 = 0 + 5/60$

$1/15 = 0 + 4/60$

$1/20 = 0 + 3/60$

$1/30 = 0 + 2/60$

$1/40 = 0 + 1/60 + 30/60^2$

$1/60 = 0 + 1/60$

→ développement en séries continues, approximations successives. Pour les rationnels, cela s'arrête exactement,

Des rationnels aux irrationnels ()…

Le scandale pythagoricien : besoin des irrationnels (indispensables à la géométrie, à la physique). *rationnels* --> *réels* (complétion)

une suite de Cauchy est un " candidat à converger " (dans une certaine topologie). Elle converge dans la complétion. (1930, Riesz, Fischler)

Puis les nombres complexes… (Cardan), quaternions…

Géométrie

Traite des surfaces, espaces … et leurs généralisations ; et des objets que l'on peut concevoir (dessiner) dedans. (J'utilise provisoirement le mot « espace » dans un sens très général. Tout objet géométrie est « dans un espace » : Il faut d'abord définir et étudier les espaces.)

Un espace est fait de points mais c'est insuffisant : un ensemble de points n'est pas un espace : il faut par exemple définir quels points sont « proches » des autres. C'est la première étape de la géométrie : topologie.

• les grandes énigmes géométriques de l'antiquité se rapportent aux caractéristiques des sphères, à doubler le volume d'un cube, à séparer un angle en trois parties égales, et à trouver des triangles rectangles dont les côtés sont formés de nombres entiers. De plus, les outils de l'époque requièrent de n'utiliser que la règle et le compas.

• Mathématiques de l'Égypte antique : calcul de longueurs, d'aires et de volumes ; associé à l'architecture (calculer les volumes de pyramides et de cylindres et l'aire d'une sphère.)

- La géométrie d'Euclide : le plan, l'espace (euclidien),… R^n

Pourtant, géométrie du ciel = géométrie « sphérique » de la sphère céleste

La géométrie par l'algèbre

Fermat et Pascal, Descartes…, Coordonnées et dimensions

géométrie Riemannienne

Histoire du postulat d'Euclide ; au XIXe siècle Gauss, Riemann et d'autres mathématiciens s'intéressent à la courbure de l'espace et à la possibilité qu'une autre géométrie soit possible. (→ Einstein)

→ idée de variété : une surface ressemble à un plan par morceaux, mais pas globalement. On l'obtient en « recollant » des morceaux de plan (généralisation des surface.

Variétés

ensembles de points, avec des relations entre eux.

Topologie : relations de voisinage : insensibles aux déformations ; notion de continuité ; indicateurs topologiques ; dimension (Cylindre / ruban de Moebius). Un ensemble devient un *espace topologique* s'il est muni d'une *structure topologique*.

Celle-ci nous informe sur le degré de voisinage des points : on définit des sous-ensembles de points, qui obéissent à certaines propriétés », que l'on appelle voisinages, ou « ouverts ».

Distinguer une surface d'un espace (dimensions), compacité (fini ou infini), connexité (un seul morceau ou plusieurs…)…

La topologie est insensible aux déformations : ça ne suffira pas à faire de la géométrie
Pas possibilité d'étudier la variation des fonctions, de les intégrer, d'écrire des équations différentielles, de définir des distances….

L'algèbre donne une vision algébrique de l'espace (coordonnées, Newton)

Encore davantage de structure pour une variété : mesure ; structure différentielle (comment dériver les fonctions ; comment elles varient, équations différentielles, champs de vecteurs, tenseurs…) ; structure métrique…