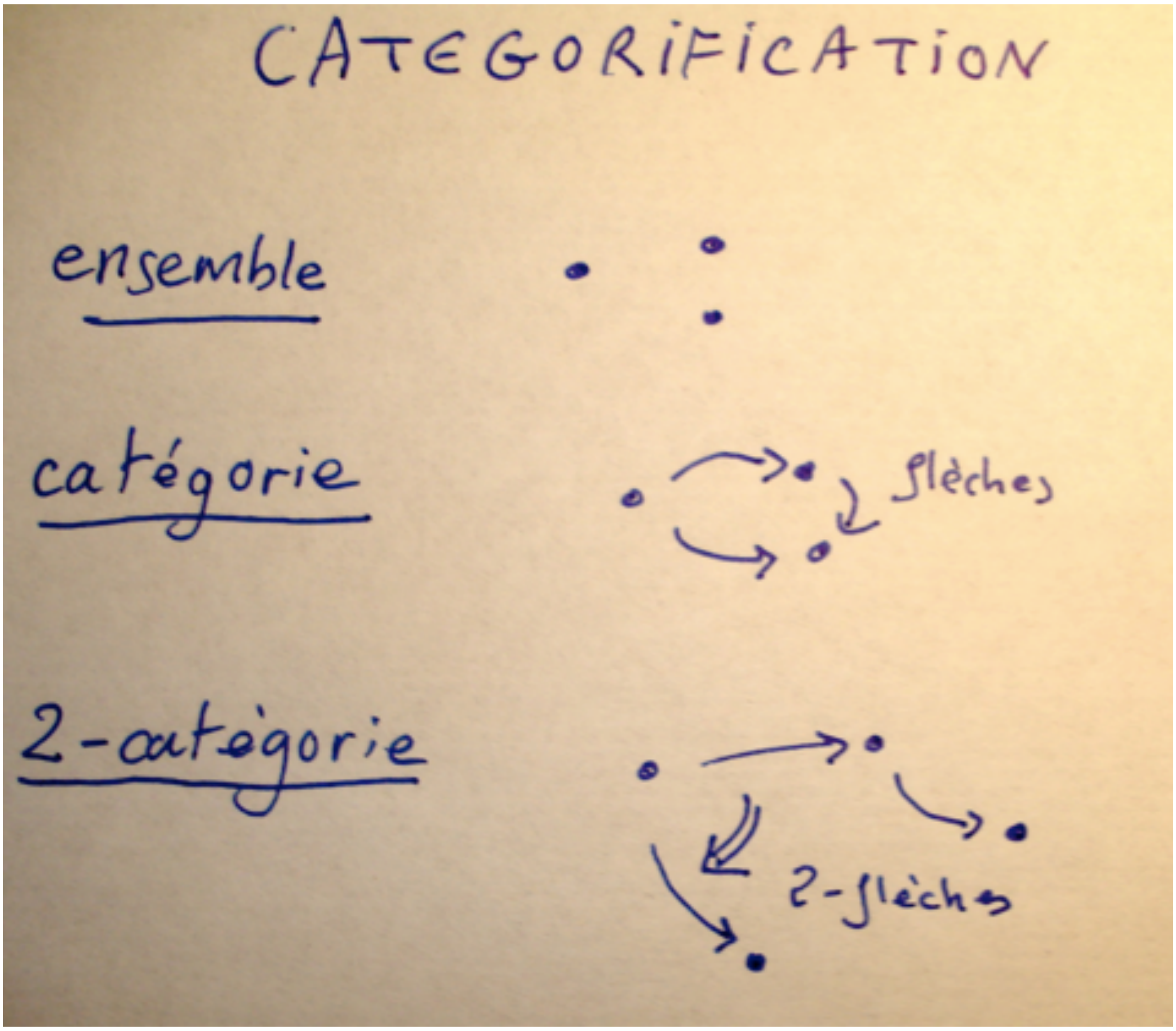
Ensembles et catégories



Exemple : topos

La catégories des ensembles (cartes = fonctions) a des propriétés particulière : c'est un topos (Lawere, Grothendick)

Or on peut généraliser la notion de topos : ensembles généralisés, fonctions généralisées.

Un topos est un autre monde : les objets mathématiques usuels sont des objet dans le topos des ensembles.

On peut définir des nouveaux objets -- avec la même définition -- mais dans un autre topos : cela donne de nouveaux objets, que souvent on ne peut pas construire autrement → par exemple nouvelle géométrie.

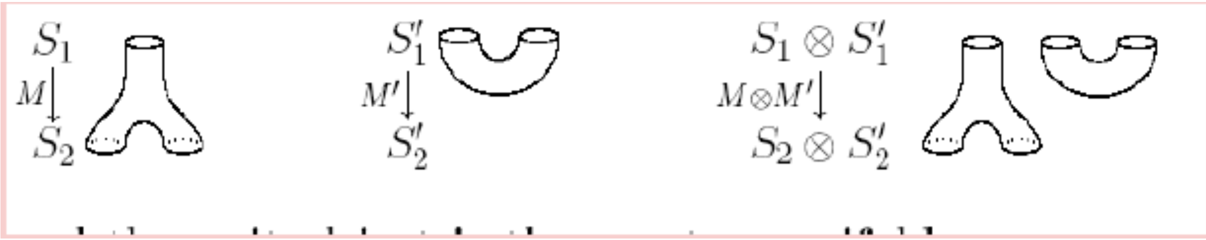
Les objets dans le topos obéissent (presque) aux mêmes règles que les objets usuels correspondants. On peut donc transcrire les démonstrations usuelles, presque sans les modifier, mais elles s'appliquent maintenant aux nouveaux objets : un processus extrêmement efficace pour de nouvelles démonstrations.

Cependant la logique dans le topos n'est pas la même que dans le topos des ensembles : intuitionniste (pas de tiers exclu) et non pas booléenne : cela ne s'applique qu'à certaines démonstrations.

Application : physique quantique : mêmes définitions des objets et des lois que dans la physique classique, mais dans le topos (en fait objets différents) → logique différente !

Autres exemples

1) catégories géométriques : cobordismes



2) catégories algébriques

3) foncteurs entre les deux : théorie quantique des champs   !

applications à la gravité quantique ?

Calcul

• calculs algébriques (dans quel ensemble ?)

addition, multiplication / puis soustraction (essai, erreur) → nombres négatifs

division → rationnels (rapports d'entiers)

racines carrées → réels   → complexes

les réels : on calcule souvent dans **les réels** (géométrie)

nombres rationnels, nombres algébriques (solutions d'équations algébriques : ex ; racine de 2), puis transcendants (non algébriques: e, pi…).

(mais pi + e ? on ne sait pas)

• les nombres réels non calculables !

• Calculs élémentaires (additions, multiplications**) e**ffectués par dispositifs logiques simples

Autres calculs : combinaisons d'additions et de multiplications, méthodes essais / erreurs

Modèle de calcul, algorithme → programme (adapté à une machine, dans un langage)

• Une machine de Turing (1936) est un appareil théorique : « l'ordinateur parfait ». Tout ce que peut faire un ordinateur réel, elle peut le faire. Elle dispose • d'une bande infiniment longue sur laquelle une tête peut lire et écrire, • d'un registre de mémoire (fini) et • d'un "processeur" capable de réaliser les opérations suivantes :

déplacer la bande vers la droite / la gauche ;

modifier l'état du registre selon sa valeur actuelle et la valeur sur la bande ;

écrire ou effacer une valeurs sur la bande.

Le traitement continue jusqu'à ce que la machine atteigne un état particulier qui provoque son arrêt (ceci ne se produit pas forcément.)

Calculer les réels

• la plupart des nombre s réels ont un nombre infini de décimales (pi, e, racine de 2 ...)

calculer un nombre (réel), c'est écrire toutes ses décimales les unes après les autres.

• un réel est calculable s'il existe un procédé permettant de l'approcher de plus en plus (une suite qui converge) ; s'il est calculable il existe un programme qui le calcule effectivement (théorème)

Peut-on trouver un programme qui le fasse pour chaque réel ?

La réponse est forcément non car le nombre de programmes possibles est dénombrable, strictement inférieur à celui des réels. → Il y a forcément des nombres réels non calculables ! (On connaît bien sur beaucoup de réels calculables.)

Mais il y a des non calculables. Pas vraiment définis ?

SI ← Godel, Turing les ont parfaitement définis.

• Problème de l'arrêt des programmes :

un programme peut continuer indéfiniment et s'arrêter.

Ex :

1 A=1

2 A→ A+1

3 si A <10 revenir à l'instruction 1

4 end

ou non

1 A=1

2 A→ A+1

3 revenir à l'instruction 1

4 end

• le nombre Tau : Turing (1936) : il est impossible de trouver un programme qui réponde (en un temps fini) à la question de savoir si un programme quelconque s'arrête ou non: question formellement indécidable. Il en résulte que le nombre Tau est bien défini mais pas calculable :

La $n^{è}$ décimale est 1 si le programme P_n s'arrêt, sinon 0.

(nous connaissons quand même au moins une infinité de décimales de TAU : pour tous les programmes dont nous savons s'ils s'arrêtent.)

les nombres OMEGA de Chaitin sont encore moins calculables (seulement un nombre fini de décimales)

(définis par la probabilité d'arrêt d'une machine)

les nombres OMEGA de Solovay sont encore moins calculables : aucune décimale

• les nombres OMEGA de Chaitin ne sont pas calculables mais sont « approchables » : plus lentement que pour n'importe quel nombre calculable !

On peut démontrer beaucoup de propriétés du nombre OMEGA : … il est « aléatoire » …

Si on le connaissait on connaitrait la réponse à presque tous le problèmes mathématiques actuels : nombre de Borel