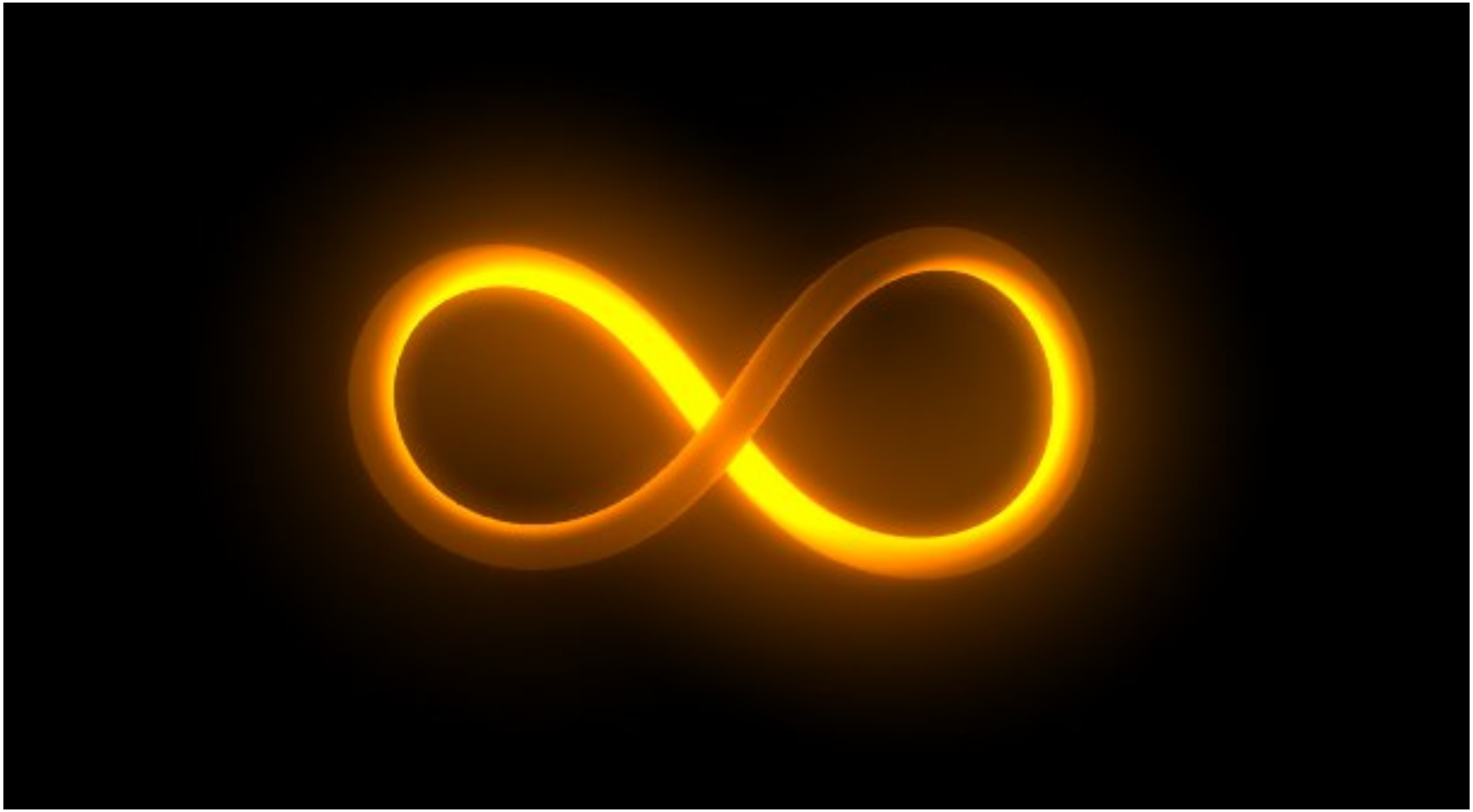
Fini Infini
Marc Lachièze-Rey

Thomas d'Aquin :

« quiconque tente de concevoir l'infini actuel commet un **abominable péché d'orgueil »** (concurrence avec Dieu).

Leibniz:

« Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la perfection de son Auteur »



« Qui est là ? Ah très bien : faites entrer l'infini »

(Louis Aragon, Une vague de rêves, 1924)

« Il est un concept qui corrompt et dérègle les autres. Je ne parle pas du Mal, dont l'empire est circonscrit à l'éthique ; je parle de l'infini. »

JORGE LUIS BORGES, LES AVATARS DE LA TORTUE

Les mathématiques, science de l'infini ?

Pour l'Antiquité grecque, l'infini est objet d'horreur et de répulsion, alors qu'il est déjà parfois présent de manière cachée dans certains raisonnements mathématiques.

De fait, le développement de la discipline fera de plus en plus apparaitre la nécessité d'y recourir. Mais les mathématiciens sont confrontés à des difficultés et des paradoxes qui leur barrent la route pour le maitriser. Le processus d'apprivoisement commence au XVIIIè siècle : Bernard Bolzano amorce une évolution décisive en reconnaissant qu'il doit exister plusieurs infinis différents; la notion est petit à petit légitimée, notamment par l'intermédiaire du concept d'ensemble. Elle sera définitivement formalisée au XIXè siècle, avec les travaux de Dedekind, et surtout de Cantor, qui permettront de manipuler les infinis presque comme les nombres ordinaires.

Mais ce dernier fut lui-même surpris par les résultats étonnants qu'il découvrit à son propos, tandis que d'autres, tels certains « intuitionnistes », ont préféré rejeter ces infinis, et délimité une portion limitée des mathématiques où l'on peut s'en passer.

Aujourd'hui, petits et grands infinis imprègnent toutes les disciplines mathématiques, y compris en des endroits inattendus, à tel point que le mathématicien Hermann Weyl a pu les qualifier de « science de l'infini ».

L'infini du monde

Les Atomistes Grecs glorifiaient l'infini. Le monde d'Aristote est clos, limité par la Sphère des fixes.

Ce débat millénaire sur l'extension de notre espace a vu s'affronter à peu près tous les penseurs: philosophes, physiciens, cosmologues, mathématiciens,… ont avancé des arguments d'ordres logique, mathématique, géométrique, observationnel, mais aussi parfois esthétique ou théologique… La question jalonne la progression de l'astronomie et de la cosmologie. On verra un Képler prudent s'opposer à un Giordano Bruno enthousiaste, alors que les deux options — fini ou infini — posent chacune des problèmes. Elle prend un tour nouveau au XXè siècle avec la théorie de la relativité générale d'Einstein qui (grâce à la géométrie riemannienne découverte au siècle précédent) rend pour la première fois possible de penser sans paradoxe aussi bien un univers fini qu'un univers infini. La « cosmologie relativiste » actuelle ne nous donne pas encore de réponse définitive, mais les observations des galaxies et du fond diffus cosmologique nous en rapprochent.

Infinis en physique

espace - temps – matière : sujets de débat depuis l'antiquité (Aristote contre les Atomistes) jusqu'à aujourd'hui.

monde fini → paradoxe de la frontière.

monde infini → paradoxe de la nuit noire.

relativité générale (géométrie riemannienne) et cosmologie relativiste (Einstein ; expansion ; big bang).

non-divisibilité infinie de la matière (particules élémentaires) ; hypothèse atomiste.

non-divisibilité infinie de l'espace et du temps ?

sujet ouvert (échelles de Planck).

Aristote: *L'infini existe-t-il vraiment ?*

Aristote *pose le problème de l'infini en termes modernes. (mouvement, longueur , durée…)*

Trois façons d'être infini :

Par composition: les nombres (addition ou multiplication), sans limitation.

Par division : matière divisible à l'infini (contrairement aux Atomistes).

Par composition et division : le temps, le mouvement des sphères célestes (ni fin ni commencement).

Distinction fondamentale entre infinis **actuel** (effectivement réalisé dans la nature) et **potentiel** (simple fiction nécessaire à la pensée pour résoudre certains problèmes)

Aristote associe « infini » à l'expression de **l'imperfection**

→ résistance à l'idée d'infini (actuel) des scientifiques, philosophes, théologiens …, au-delà de toute position rationnelle.

- **Avicenne** (980-1037) défend la finitude des grandeurs géométriques ;

Mais soutient l'existence d'un infini actuel, celui du nombre des âmes humaines.

- **Hasdai Crescas** (1340-1412, juif en Aragon), contredit Aristote : infinitude de l'Univers, pluralité des mondes possibles, existence d'un vide spatial, grandeurs et nombres infinis en acte.

plénitude

L'apparition du christianisme entraîne amendements et transformations de l'infini potentiel d'Aristote, afin de rendre compte de l'infinité divine, supposée actuelle: infini attribut de Dieu ? (Pères de l'église, néoplatoniciens, scolastiques)

Le Cardinal **Nicolas de Cuse** (1401-1464) contredit Aristote : L'infini actuel est un mode de connaissance, car « les oppositions s'y résolvent ».

principe de plénitude (*Traité de la Docte Ignorance*, 1440): Dieu ne saurait être limité dans ses œuvres → pas de limites au résultat de sa création → Univers infini et pluralité des mondes. (repris par Bruno, Descartes, Spinoza…)

- Théologie → mathématiques et philosophie de la nature,
- géométrie perspective (XVe siècle),

→ infiniment grands de la cosmologie (XVIIe siècle)

→ infinitésimaux (XVIIe - XVIIIe siècles).

→ infiniment grands des mathématiques

Infini du Monde, Infini du ciel

« L'infini du ciel, avec ses défis, son roulement, ses mots innombrables, n'est qu'une phrase un peu plus longue, un peu plus haletante que les autres. »

(René Char : Possessions Extérieures)

Antiquité : premiers infinis

- **Anaxagore de Clazomènes (500-428 avant notre ère) :**

« *Au début du monde était une soupe cosmique illimitée, compacte et immobile. Le ciel contient un nombre infini de graines. Il est constitué des mêmes substances que la Terre, et il n'est pas gouverné par des dieux.* »

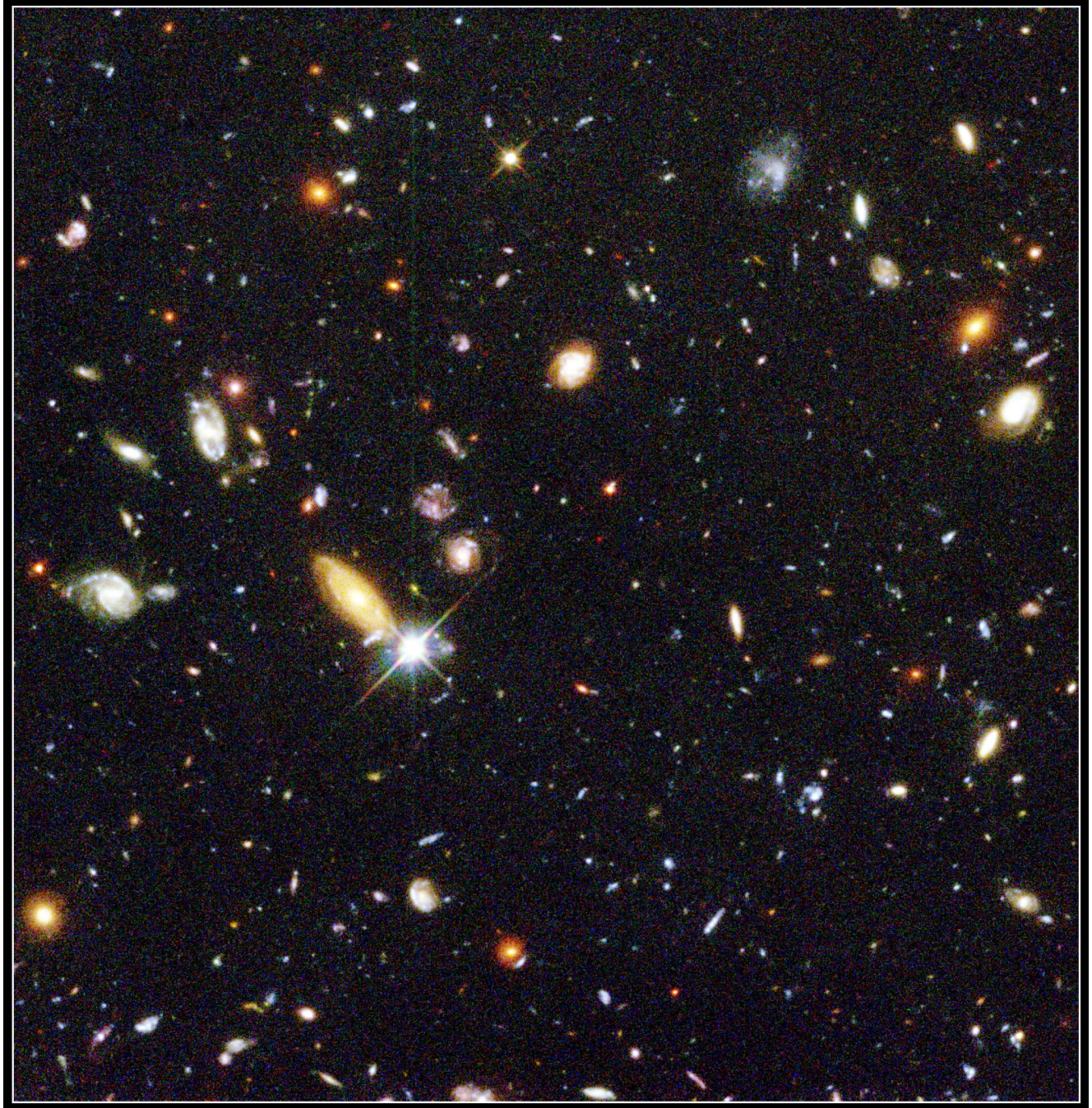
illAuJdela

→ accusé d'impiété et d'hérésie.

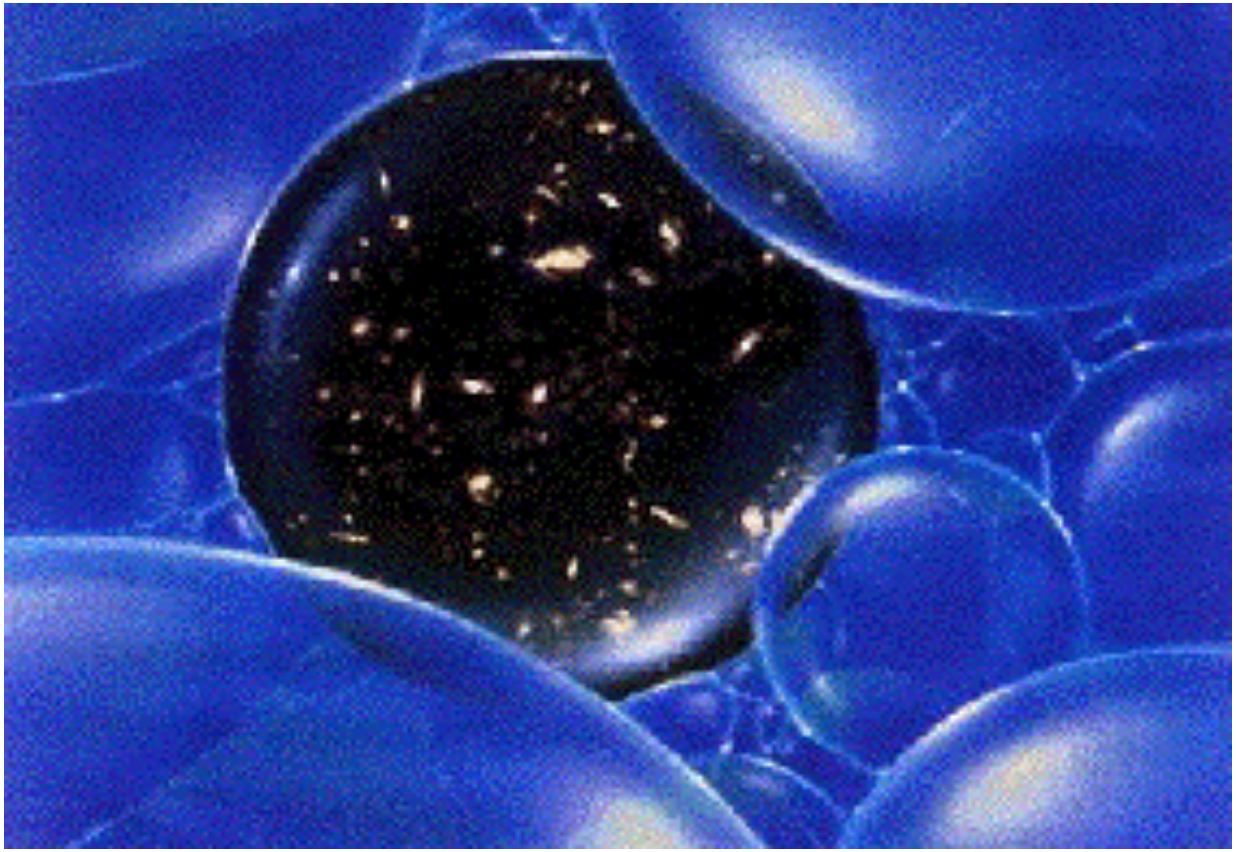
- **Anaximandre de Milet** (VI^{e} siècle avant notre ère) :

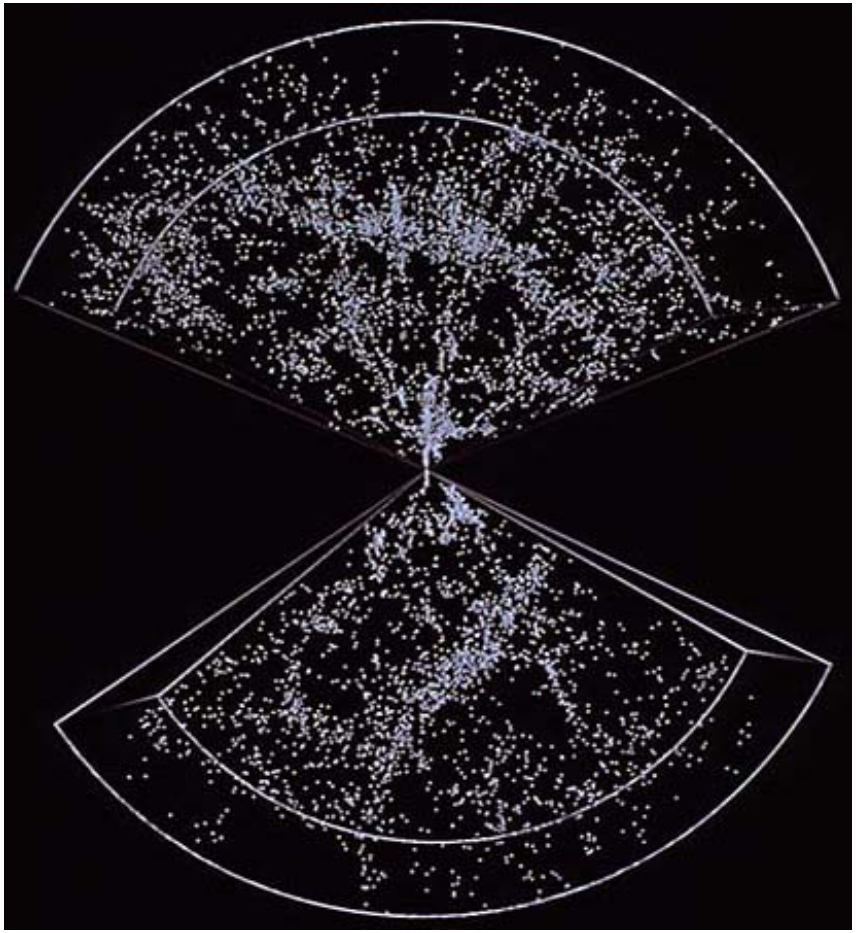
apeiron élément premier de toutes choses. (infini, illimité, éternel, indéfini (indéterminé), inconcevablement grand ???)

Mais « Monde » clos : bulle d'air hémisphérique flottant au sein d'une masse liquide infinie



Hubble Deep Field





Atomisme

(fondé au V^{e} siècle av. J.-C. par Leucippe et Démocrite ; puis Épicure (341-270) et Lucrèce (I^{er} siècle avant notre ère).

atomes indivisibles, indestructibles, inaltérables, existent de toute éternité, en nombre infini; dans le vide (*kenon)* sans bornes, infini

→ **pluralité des mondes** (toutes les combinaisons possibles des atomes).

Épicure (Lettre à Hérodote):

« Il existe des mondes infinis, à la fois semblables à notre Monde et différents. Car, leur nombre étant infini, [...] les atomes sont entraînés au loin dans l'espace. En effet ces atomes, destinés par leur nature à créer ou à façonner des mondes, ne sont pas définitivement épuisés sur un seul monde ou sur un nombre limité de mondes, ni sur des mondes semblables, ni sur ceux qui sont différents de ces derniers. De sorte qu'il n'existe nulle part d'obstacle à un nombre infini de mondes. »

Atomisme : Lucrèce (*De Natura Rerum)*.

« Ce que l'esprit recherche dans l'espace infini qui s'étend au-delà des limites de notre monde, c'est ce qu'il peut bien y avoir dans cette immensité que l'intelligence scrute à son gré, et vers laquelle s'envole la pensée, libre d'entraves.

Tout d'abord, nulle part, en aucun sens, à droite ni à gauche, en haut ni en bas, l'univers n'a de limite ; je te l'ai montré, l'évidence le crie, cela ressort clairement de la nature même du vide. Si donc de toutes parts s'étend un libre espace sans limites, si des germes innombrables multipliés à l'infini voltigent de mille façons et de toute éternité, est-il possible de croire que notre globe et notre firmament aient été seuls créés et qu'au-delà il n'y ait qu'oisiveté pour la multitude des atomes ? Songe bien surtout que ce monde est l'ouvrage de la nature, que d'eux-mêmes, spontanément, par le seul hasard des rencontres, les atomes, après mille mouvements désordonnés et tant de jonctions inutiles, ont enfin réussi à former les unions qui, aussitôt accomplies, devaient engendrer ces merveilles : la terre, la mer, le ciel et les espèces vivantes. Il te faut donc convenir, je le redis, qu'il s'est formé ailleurs d'autres agrégats de matière semblables à ceux de notre monde.

Toutes les fois d'ailleurs qu'une abondante matière se tient prête, qu'un espace l'attend et que rien ne fait obstacle, il est évidemment fatal que les choses prennent forme et s'accomplissent. Et si par surcroît les germes sont en telle quantité que tout le temps de l'existence des êtres ne suffirait à les compter ; si la même force subsiste et la même nature pour les rassembler en tous lieux et dans le même ordre que les atomes de notre monde, il faut admettre que les autres régions de l'espace connaissent aussi leur globe, leurs races d'hommes et leurs espèces sauvages. »

Finitisme cosmologique

Critique de l'atomisme: conflit avec la religion (cf Anaxagore).

Parménide (Ve siècle avant JC) : « Mais puisque existe une limite extrême, [l'Être] est de toutes parts borné et achevé, et gonflé à l'instar d'une balle bien ronde, du centre vers les bords en parfait équilibre. Car aussi bien en plus et aussi bien en moins, aucune variation ici ou là n'existe »

Platon (428-347) : Univers clos par une sphère ultime contenant les étoiles.

Aristote (384-322) :

le nombre de corps est nécessairement fini ;

l'Univers en tant que grandeur physique doit être fini, clos par la « dernière » des sphères célestes à l'extérieur de laquelle il n'y a rien. (Terre fixe au centre)

Le paradoxe du monde fini

monde fini → frontière !

Archytas de Tarente (pythagoricien du V^{e} siècle) : si je suis à l'extrémité du ciel des étoiles fixes, puis-je allonger la main ou un bâton ? Il est absurde de penser que je ne le peux pas ; et si je le peux, ce qui se trouve au-delà est soit un corps, soit l'espace. Nous pouvons donc aller au-delà de cela encore, et ainsi de suite. Et s'il y a toujours un nouvel espace vers lequel on peut tendre le bâton, cela implique clairement une extension sans limites.

Repris par Nicolas de Cuse, Giordano Bruno…

(géométries non euclidiennes) : fini sans bord

• **Cosmos médiéval**: fini, centré sur la Terre fixe, très petit

→ paradis accessible aux âmes des défunts. (Dans son *Livre des Egarés*, le philosophe juif Maimonide (1135-1204) estime la sphère des étoiles fixes à 8 700 ans de marche !

• **Copernic**: héliocentrisme, (Aristarque de Samos, III^{e} siècle avant JC) ;

Univers fini, mais immense: 2 000 fois plus que celui de Ptolémée.

• étoile nouvelle (**Tycho Brahe**, 1572) (supra-lunaire).

• **Thomas Digges** (1576) éparpille les étoiles dans l'espace infini. [*A Perfit Description of the Caelestial Orbes*] : Univers extrêmement vaste.

• **Francesco Patrizi** (1587, *De l'espace physique et mathématique) :* espace physique homogène, infini, mathématique.

- **Giordano Bruno** (1548-1600)

« Voici alors apparaître l'homme qui a franchi les airs, traversé le ciel, parcouru les étoiles, outrepassé les limites du monde, dissipé les murailles imaginaires des sphères – du premier, du huitième, du neuvième, du dixième rang ou davantage – postulées par de vains calculs mathématiques ou par une aveugle et vulgaire philosophie (...). C'est lui qui, avec les clefs de sa compétence, a ouvert par ses recherches ceux des cloîtres de la vérité auxquels nous ne pouvons avoir accès. Il a mis à nu la nature, que des voiles enveloppaient ; il a donné des yeux aux taupes et rendu la lumière aux aveugles. (...) Nous le savons : il n'y a qu'un ciel, une immense région éthérée où les magnifiques foyers lumineux conservent les distances qui les séparent au profit de la vie perpétuelle et de sa répartition. »

Souper des Cendres, 1584.

« C'est donc vers l'air que je déploie mes ailes confiantes, ne craignant nul obstacle, ni de cristal, ni de verre, je fends les cieux, et je m'érige à l'infini. Et tandis que de ce globe je m'élève vers d'autres globes et pénètre au-delà par le champ éthéré, je laisse derrière moi ce que d'autres voient de loin ».

Prudence !

• **philosophe Henry More** (1614-1687) Chef de file de l'école des néoplatoniciens de Cambridge : espace absolu et infini, atomisme, pluralité des mondes

« Les planètes de notre monde sont des nœuds sur l'écharpe universelle de la sainte Psyché, qui fut à l'origine un tissu fin, pur, mince et perméable, jusqu'à ce que les puissances cachées les eurent rassemblées en certains points, amenant les parties voisines à se combiner en un seul corps. Tout ce qui se fait sur cette étoile qu'est la Terre se fait aussi sur chaque autre sphère. Et chaque cercle de feu que nous voyons au loin, n'est qu'un nœud sur le vêtement de Psyché » (*Essai sur l'Infinité des Mondes*, 1646)

• **Johannes Kepler (1571-1630) : prudent.**

Kepler : « En vérité, un corps infini ne peut être compris par la pensée. En effet, les concepts de l'esprit au sujet de l'infini se réfèrent ou bien à la signification du mot « infini », ou bien à quelque chose qui excède toute mesure numérique, visuelle ou tactile concevable ; c'est-à-dire à quelque chose qui n'est pas infini en acte, vu qu'une mesure infinie n'est pas concevable ».

paradoxe de la nuit noire.

Galilée (1564-1642) **: prudent.**

« Ne savez-vous pas qu'il est encore non décidé (et je crois que cela le restera toujours pour la science humaine) si l'Univers est fini ou infini ? »

Descartes (1596-1650) : coordonnées.

« Il n'y a que Dieu seul que je conçoive positivement infini ».

Pascal : « le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie ».

Newton et **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646-1716) : espace infini.

Poètes

1742 l'anglais Edward Young (1683-1765) : chantre de l'espace newtonien et de son infini.

En Italie, le comte Giacomo Leopardi (L'infini, 1819)

George Byron, L'Abîme de l'Espace: infini « d'en haut » , infini d'en bas.

Walt Whitman (Chant de moi-même, 1855).

« Ce ne sont que des parties, tout n'est que partie. Aussi loin que porte ton regard, il y a un espace infini au-delà, Si grand que soit le nombre auquel tu arrives, il y a le temps infini en deçà et au-delà. »

- *Poèmes à travers l'Infini* de Marc Bonnefoy

  « L'inépuisable Temps siècle à siècle s'écoule,

  Et sans cesse et toujours l'Infini se déroule ;

  Et du but nos efforts ne nous rapprochent pas. »

Prudence !

Kant, *Critique de la Raison Pure* (1781), réfute l'infinité temporelle de l'Univers

apories : impossibilité de construire sans contradiction logique aussi bien un Univers fini qu'un Univers infini. La question a-t-elle vraiment un sens ?

XIX^{e} siècle : Gauss, Bolyai, Lobatchevski, Bernhard Riemann (1854) un espace dépourvu de limite n'est pas forcément infini. → Modèles cosmologiques

Infini mathématique

Existe-t-il un nombre que l'on puisse associer à la notion d'infini ?

Existe-t-il des ensembles contenant un nombre infini d'éléments ?

paradoxe des indivisibles (infiniment petits)

paradoxe de la réflexivité (infiniment grands).

Omniprésence de l'infini en mathématiques (infinité de décimales du nombre pi : se calcule par un processus infini.

Bernard Bolzano (début du XIX^{e} siècle) : statut

Fin du même siècle : Georg Cantor

Infini mathématique

- paradoxes à l'appui (points du cercles, nombres carrés), on en est venu à l'idée, qu'il existe plusieurs sortes d'infinis en mathématiques.
- (Fontenelle et Bolzano ont suggéré cette diversité.)
- Dedekind et Cantor ont apprivoisé les grands infinis « cardinaux » : dénombrable (aleph 0) ; continu ; toute une suite appelée aleph 1, aleph 2....
- Omniprésence de l'infini en maths, souvent de manière cachée;

(paradoxe de Zénon qui sera résolu par le calcul différentiel; calcul de pi (exhaustion) ; récurrence; limites etc…

Infini mathématique

Aristote reconnaît à l'infini une nécessité mathématique **opératoire** nécessaire aux démonstrations : infini en puissance (potentialité, virtualité) : dans le nombre; mais pas de nombre « infini actuel ».

dans la grandeur: la division ne s'achève jamais.

Euclide n'énonce pas qu'il existe une infinité de nombre premiers, mais que « les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité de nombres premiers proposée ». Pendant longtemps, la plupart des mathématiciens évitent les infinis actuels pour se limiter aux infinis potentiels.

Ex **: La « méthode des Anciens »** (Archimède) : exhaustion

aire d'un cercle : suite infinie de polygones inscrits, exinscrits infinigone → p =3,1416. (Eudoxe IV^{e} avJC ; Euclide …)

sophiste Antiphon (V^{e}avJC): scandale: le polygone *devient* cercle

aujourd'hui dans ordinateurs ne connaissent pas l'infini, ni l'exactitude car l'exactitude est tributaire de l'infini.

Infini mathématique

Cardinal **Nicolas de Cuse** (1401-1464) contredit Aristote : infini actuel : cercle = polygone dont le nombre d'angles

calcul différentiel (Leibniz) :« le polygone s'approchant continûment d'une courbe n'en est pas une approximation mais un équivalent ». **limite infinie**

→ utilisation de l'infini(avouée ou non) indispensable à la résolution de nombreux problèmes mathématiques.

Les très grands nombres

Grèce antique, 10 000= *murias* (→ *myriade*) : très grand nombre.

Archimède (*l'Arénaire*): concrétisation de l'infini : exprimer le plus grand nombre possible à partir des symboles dont il dispose : $10^{800\,000\,000}$, qu'il démontre très supérieur au « nombre de grains de sable nécessaires pour remplir la sphère des étoiles fixes », estimé par lui à 10^{63} « seulement ».

Le compteur de sable

« Certains estiment, roi Gélon, que le nombre de grains de sable est infiniment grand, et j'entends non seulement le sable des environs de Syracuse et du reste de la Sicile, mais encore celui qui est répandu dans toute la Terre, habitée ou inculte. D'autres, tout en admettant que ce nombre n'est pas infiniment grand, pensent qu'il n'existe pas de nombre exprimable assez grand pour dépasser la quantité de sable. Cependant, si ceux qui sont de cet avis s'imaginaient un volume de sable égal à celui de la Terre, ce volume comprenant toutes les mers et les vallées de la Terre remplies de sable jusqu'aux plus hautes montagnes, il est évident qu'ils reconnaîtraient encore beaucoup moins qu'on puisse énoncer un nombre dépassant le nombre de ces grains de sable. Or je tâcherai de te montrer, par des démonstrations géométriques que tu pourras suivre, que, parmi les nombres que j'ai énoncés et exposés dans mes écrits adressés à Zeuxippe, il y en a qui dépassent non seulement le nombre de grains de sable dont le volume serait égal à celui de la Terre remplie de la matière que nous avons indiquée, mais même ayant un volume égal à celui de l'univers. »

« le sable échappe au calcul » (Pindare 2 siècles auparavant)

Les très grands nombres

nombre de particules élémentaires contenues dans l'Univers observable : entre 10^{80} et 10^{87}.

10^{100} = « googol » ;

Émile Borel (*Le hasard*, 1914) : « **singes dactylographes** » produisent « la copie exacte des livres de toute nature et de toutes langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde ».

« notre armée de singes dactylographes, travaillant toujours dans les mêmes conditions, fournira chaque jour la copie exacte de tous les imprimés, livres et journaux, qui paraîtront le jour correspondant de la semaine suivante sur toute la surface du globe et de toutes les paroles qui seront prononcées par tous les hommes en ce même jour. » au bout de 10^{107} années

- 1999 découverte du 38e nombre premier de Mersenne, $2^{6\,972\,593} - 1$, (2 098 960 chiffres).
- **nombre de Graham** = le plus grand nombre jamais utilisé dans une démonstration mathématique. (Si toute la matière de l'Univers était transformée en encre, elle ne suffirait pas à l'écrire en notation décimale ; notation spécialement inventée par le mathématicien Donald Knuth pour décrire les très grands nombres.)

Les très grands nombres

cardinal : nombres entiers en nombre infini ?
ordinal (autre question): le « plus grand de tous les nombres entiers »?

Saint Augustin: Dieu seul:
« l'intelligence divine est capable d'embrasser toute infinité et de dénombrer les êtres innombrables sans énumération mentale. »

Irrationnels (nombres qui ne sont pas des fractions).
Les Pythagoriciens (VI^{e} siècle avJC): à toute grandeur physique ou géométrique il est possible d'associer un rapport de nombres entiers (rationnel).
racine carrée de 2 ? → irrationnels (à la fois finis et infinis) : limite d'une suite infinie de rationnels ; nombre infini de décimales).
un segment de droite est fini du point de vue de sa longueur, infini du point de vue de l'ensemble de ses points.

Leibniz : « l'origine des grandeurs transcendantes, c'est l'infini ».
Pourtant solutions de certains calculs physiques → (Leibniz) **« la nature fait entrer l'infini dans tout ce qu'elle fait ».**

Suites, séries et convergence
processus → suivant.
impossibilité de répondre à toutes les questions la concernant
nombre irrationnel = suite [de Cauchy] de rationnels

LIMITES

Suites (processus → suivant**):** **1,2,3**…

séries **1+1/2+1/3+1/4**…

Convergence ?

impossibilité de répondre à toutes les questions la concernant

Nombre ***Irrationnel (qui n'est pas une fraction)*** = suite [de Cauchy] de rationnels

Les Pythagoriciens (VI^{e} siècle avJC): à toute grandeur physique ou géométrique il est possible d'associer un rapport de nombres entiers (rationnel).

racine carrée de 2 ? → irrationnels (à la fois finis et infinis) : limite d'une suite infinie de rationnels ; nombre infini de décimales).

un segment de droite est fini du point de vue de sa longueur, infini du point de vue de l'ensemble de ses points.

Leibniz : « l'origine des grandeurs transcendantes, c'est l'infini ».

Pourtant solutions de certains calculs physiques → (Leibniz) **« la nature fait entrer l'infini dans tout ce qu'elle fait ».**

tout nombre réel fait intervenir l'infini (nombre infini de décimales)

Infini et logique

Thomas d'Aquin :
quiconque tente de concevoir l'infini actuel commet un **abominable péché d'orgueil** (concurrence avec Dieu).

Robert Grosseteste (vers 1170-1253) : un nombre infini peut être plus grand qu'un autre.

Nicole Oresme (1320-1382) : plusieurs infinis « chacun d'entre eux est incomparable à quelque autre ».

Grégoire de Rimini (vers 1300-1358) : infini en acte, infinis inégaux.

Bernard Le Bovier de Fontenelle (Éléments de la Géométrie de l'Infini 1727)
distingue infinis géométrique et métaphysique
« nombre infini [qui] existe aussi réellement que les nombres finis ».

Leibniz: « Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la perfection de son Auteur »

Karl Friedrich Gauss (1777-1855): « Je conteste qu'on utilise un objet infini comme un tout complet ; en mathématiques, cette opération est interdite ; l'infini n'est qu'une façon de parler ».

Bolzano → Dedekind → Cantor

paradoxe de la *réflexivité* : parties aussi grandes que le tout

- entiers et nombres pairs ; carrés [Galilée].
- **deux cercles concentriques** (Jean Duns Scot , franciscain et mathématicien écossais, XIII^{e} siècle):

Bernhard Bolzano, philosophe et mathématicien tchèque (*Les paradoxes de l'infini*, 1851):

infini actuel, quantitatif ; même statut que les nombres finis

les propriétés considérées comme paradoxales doivent être utilisées pour *définir* l'infini.

réflexivité : Un argument utilisé jadis pour réfuter l'infini devient ainsi la propriété définissant les ensembles infinis !

« est contenu dans » ./. « avoir une taille plus petite que ».

→ *plusieurs* infinis : multiplicité condition d'existence de l'infini.

L'hôtel de Hilbert *(1862-1943)*

pourvu d'un nombre infini de chambres, toutes occupées. nouveau client: transférer l'occupant de la chambre n˚ 1 dans la n˚ 2, celui de la n˚ 2 dans la n˚ 3, et ainsi de suite.

L'arrivant dans la chambre n˚ 1. …

Bolzano → Richard Dedekind (1831-1916), Cantor

Les infinis cardinaux de Georg Cantor (1845-1918)

« La plus haute perfection de Dieu est la possibilité de créer un ensemble infini, et son immense bonté le conduit à le créer » (GEORG CANTOR)

Cardinal == nombre d'éléménts d'un ensemble

• Comparer les cardinaux de deux ensembles : *correspondance biunivoque*

Cantor : plusieurs cardinaux infinis différents.

• **axiome « de Dedekind » = équipotence de la partie et du tout** :
le cardinal d'un ensemble est infini si cet ensemble a même cardinal que l'une de ses parties.

• *Le dénombrable* = cardinal *de l'ensemble N des nombres entiers: premier nombre infini=* ***aleph zéro***

• rationnels = cardinal de **Q**. !!!

• 1890 : théorème fondamental de Cantor → ensemble des parties P(E): cardinal 2^n.
- cardinal de **R** = cardinal de P(N) = *puissance du continu* = 2^{aleph0}
- méthode de la diagonale → *puissance du continu* **strictement plus grand** que aleph0.

• réprobations et critiques : Leopold Kronecker (1823-1891) bloque le manuscrit de Cantor

• autre résultat stupéfiant : **R** et $\mathbf{R}^2$, ont même cardinal !!! (ligne – surface - espace)
« je le vois, mais je ne le crois pas », écrit-il à Dedekind.

Indécidable !

- hiérarchie des transfinis : aleph0, aleph1,…

où est la puissance du continu 2^{aleph0} ?

hypothèse du continu: « continu = aleph 1 »

vraie ou fausse ?

Hilbert (1900) : numéro un des problèmes à résoudre en mathématique.

Kurt **Gödel** (1906-1978) :

1931: incomplétude : certaines propositions vraies sont indémontrables !

1938, Gödel : impossible de démontrer que HC est fausse (dans le cadre de la théorie des ensembles).

1963: Paul Cohen : impossible de démontrer que HC est vraie !

indécidable :On peut décider qu'elle est vraie. On peut aussi bien décider qu'elle est fausse, et continuer à faire des mathématiques à partir de l'une ou l'autre hypothèse, sans aboutir à une contradiction.

[ni paradoxal ni logiquement insatisfaisant]

→ Modif de la théorie des ensembles,

→ algorithmique, information, calculabilité

Les nombres non standard

(Abraham Robinson (1918-1974) :

« infiniment grands non standard » : se comportent absolument comme de grands infinis actuels.

Inverses : « infiniment petits non standard » : obéissent à toutes les règles du calcul infinitésimal (sans limites)

correspondance entre infinis (grands ou petits, introduits par passage à la limite) et non standard ; → démonstrations. → légitimité du calcul

→ statut de ces nouveaux objets ?

→ démonstrations simples ?

Finitisme et intuitionnisme

Tony Lévy: « la mathématique tisse sa toile autour de l'idée d'infini ».

mouvement « finitiste » : « l'évocation de l'infini n'a pas de sens »
(pas d'existence, ou de réalité).
→ mathématiques finitistes, très pauvres.

« intuitionnistes » (Jan Brouwer (1881-1966) s'interdisent de manipuler des totalités infinies (sans rejeter les suites infinies et la notion de limite).

admettent la récurrence (cf anciens Grecs)

Paul Valéry: « Il y a en nous une sensation finie de l'infini. Ce n'est pas une preuve de quoi que ce soit ».

Infini du temps

Aristote : le temps est défini par le mouvement : divisible et augmentable.

mouvement des sphères célestes « sans commencement et sans fin »

→ infini temporel= *éternité du monde*

L'apparition du christianisme entraîne amendements et transformations de l'infini potentiel d'Aristote, afin de rendre compte de l'infinité divine, supposée actuelle.

Jean Philopon (Alexandrie vers 500, obédience chrétienne) :

difficultés théologiques des thèses d'Aristote → création du Monde.

Al Kindi (vers 800-870) est l'un des rares philosophes à s'élever contre l'éternité du monde, une opposition qui, d'ordinaire, provient plutôt des théologiens.

Avicenne (980-1037) défend la finitude des grandeurs géométriques ;

Hasdai Crescas (1340-1412, juif en Aragon), contredit Aristote : infinitude de l'Univers, pluralité des mondes possibles, existence d'un vide spatial, grandeurs et nombres infinis en acte.